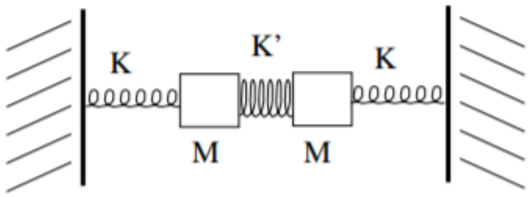
Problemas Capítulo 6: Osciladores Acoplados e Ondas

Problemas Teóricos

1. Considere 2 corpos A (à esquerda) e B (à direita) ligados por uma mola de constante elástica k', e cada um dos corpos ligado a uma mola, de constante elástica k, de extremidade oposta fixa, como mostra a figura.

Considerando só deslocações ao longo da direção das molas (deslocações longitudinais)



em que x_{Aeq} e x_{Beq} são as posições de equilíbrio dos corpos A e B, respetivamente.

a) Encontre as forças aplicadas a cada corpo, e então escreve as equações da dinâmica de Newton do sistema.

b) Escreva a energia potencial do sistema.

c) Mostre que soluções de forma

$$x_A = x_{eqA} + A\cos(\omega t + \phi \;\;)$$
$$x_B = x_{eqB} + A\cos(\omega t + \phi \;\;)$$

resolvem as equações de Newton, se $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ou se $\omega = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$.

2. Num sistema de 2 corpos, *A* e *B*, ligados entre duas paredes por três molas, de constantes elástica *k*, *k'* e *k*, a solução geral do movimento é dado por

$$x_A = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_B = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

em que x_{Aeq} e x_{Beq} são as posições de equilíbrio dos corpos A e B, respetivamente, e em que $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ e $\omega_2 = \sqrt{(k+2k')/m}$

Encontre os valores de A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 , sabendo que no instante inicial

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m, $x_{B0} = x_{Beq} + 0.05$, $v_{Bx0} = v_{Bx0} = 0.$

Dados: $k = 2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $k' = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $m = 1$ kg, $x_{Aeq} = 1.0$ m e $x_{Beq} = 1.2$ m.

3. Uma onda transversal harmónica de frequência 400 Hz propaga-se numa corda com uma amplitude de 5 cm. Dois pontos separados de 5.0 cm estão num determinado instante desfasados de $\pi/6$ rad.

a) Determine o comprimento de onda.

b) Calcule o valor da velocidade de propagação.

c) Determine o valor máximo da velocidade de oscilação transversal

4. Num sistema de 2 corpos, *A* e *B*, ligados entre duas paredes por três molas, de constantes elástica *k*, *k'* e *k*, a solução geral do movimento é dado por

$x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$

$x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$

em que x_{Aeq} e x_{Beq} são as posições de equilíbrio dos corpos A e B, respetivamente, e em que

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$$

Encontre os valores de A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 , sabendo que no instante inicial

$x_{A0} = x_{Aeq}, \quad x_{B0} = x_{Beq},$

$v_{A0} = 1\text{m/s}, \quad v_{B0} = -1\text{m/s}.$

Dados: $k = 2\frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 1\frac{\text{N}}{\text{m}};\ m = 1$ kg, $x_{Aeq} = 1.0$ m e $x_{Beq} = 1.2$ m

5. Três massas iguais, A, B e C, com massa *m=1* kg são acoplados como ilustrada no diagrama. Os constantes elásticas das molas são todos *k* = *1*N/m.

O movimento das massas obedece o seguinte sistema de equações:

$$m\,\frac{d^2u_A}{dt^2} = -k\,u_A\ - k(u_A - u_B)$$
$$m\,\frac{d^2u_B}{dt^2} = -k(u_B - u_A) - k(u_B - u_C)$$
$$m\,\frac{d^2u_C}{dt^2} = \ -k\,u_C - k(u_C - u_B)$$

Onde u_A, u_B, u_C são as posições das massas A, B e C respetivamente, relativo às suas posições de equilíbrio.

Mostre que existe um modo normal com frequência $\omega = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ em que, no movimento das massas, sempre $u_A = u_C$ e $u_B = -\sqrt{2}u_A$.

6. A vibração de uma corda obedece a equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

a) Mostre que a função $u(x,t) = A\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi v}{L}t)$ é solução à equação da onda, e que satisfaz a condição que a corda não pode mexer nas extremidades: $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

b) Calcule as frequências de vibração dos primeiros três modos normais ($n = 1,2,3$), se considere $L = 1\text{m}$ e $v = 400\text{m/s}$.

Problemas Numéricos

7. Considere 2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k', e Ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k.

Considere $k = 1\frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5\frac{\text{N}}{\text{m}};\ m = 1$ kg e $x_{Aeq} = 1.0$ m $x_{Beq} = 1.2$ m.

a) Encontre a lei de movimento dos dois corpos numericamente, nos seguintes casos:

i) $x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m, $x_{B0} = x_{Beq} + 0.05$ m, $v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$.

ii) $x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m, $x_{B0} = x_{Beq} - 0.05$ m, $v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$.

iii) $x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m, $x_{B0} = x_{Beq}$, $v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$.

b) Como carateriza o movimento dos corpos em cada um dos três casos?

c) Para casos i) e ii) mede o período T e frequência angular ω. Conformem às expetativas teóricas?

8. Ao sistema descrito em problema 1 é adicionada uma força de amortecimento em ambos os corpos, mais um forçamento externo que atua em corpo A. Assim, as posições dos corpos evoluíam em tempo de acordo com as seguintes equações:

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \frac{k'}{m}\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right) - \frac{b}{m}v_{Ax} + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

$$\frac{d^2 x_B}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(x_B - x_{Beq}\right) - \frac{k'}{m}\left(\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right) - \frac{b}{m}v_{Bx}$$

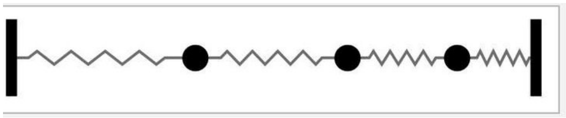
Com $k = 1\frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5\frac{\text{N}}{\text{m}};\ m = 1$ kg; $b = 0.05$ kg/s, $F_0 = 0.005\ N$, e com $x_{Aeq} = 1.0$ m $x_{Beq} = 1.2$ m.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, quando os corpos comecem em repouso em $x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m e $x_{B0} = x_{Beq} + 0.05$ m, quando $\omega_f = 1$ rad/s.

Faça o gráfico da posição dos corpos em função do tempo de 0 até 150 s.

b) Repita a simulação para valores de ω_f de 0 até 2.5 rad/s. Para cada valor de ω_f, mede a amplitude de oscilação de cada corpo no regime estável. Façao o gráfico das amplitudes em função de ω_f. O que é que se observe?

9. Três massas iguais, A, B e C, são acoplados como ilustrada no diagrama. Os constantes elásticas das molas de esquerda para a direita são *k*, *k'*, *k'* e *k*.



O movimento das massas obedece o seguinte sistema de equações:

$$m\,\frac{d^2u_A}{dt^2} = -k\,u_A - k'(u_A - u_B)$$
$$m\,\frac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C)$$
$$m\,\frac{d^2u_{CA}}{dt^2} = -k\,u_C - k'(u_C - u_B)$$

Onde u_A, u_B, u_C são as posições das massas A, B e C respetivemente, relativo às suas posições de equilíbrio.

Dados: $k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

a) Calcule numericamente as frequências angulares dos 3 modos normais de oscilação deste sistema, usando as funções de análise de vetores próprios e valores próprios.

b) Faça o gráfico do movimento das massas em cada um dos modos normais, resolvendo as equações pelo método de Euler-Cromer. Descreve cada um dos modos em termos do movimento relativo das massas.

Soluções Problemas Teóricos

1. a) $F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

$F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) - k'\left(\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right)$,

$$\frac{d^2x_A}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \frac{k'}{m}\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$$
$$\frac{d^2x_B}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(x_B - x_{Beq}\right) - \frac{k'}{m}\left(\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right)$$

b) $E_p = \frac{1}{2}\, k\left(x_A - x_{Aeq}\right)^2 + \frac{1}{2}\, k\left(x_B - x_{Beq}\right)^2 + \frac{1}{2}\, k'\left(x_B - x_A - l_0\right)^2$,

com $l_0 = x_{Beq} - x_{Aeq}$

2. $\phi_1 = \phi_2 = 0, A_1 = 0.05\text{m}, A_2 = 0.$

3. a) 60 cm; b) 240 m/s; c) 40π m/s, $\frac{\pi}{4}$ rad/s; d) $y(x,t) = 0.1\,\sin(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}t + \pi)$

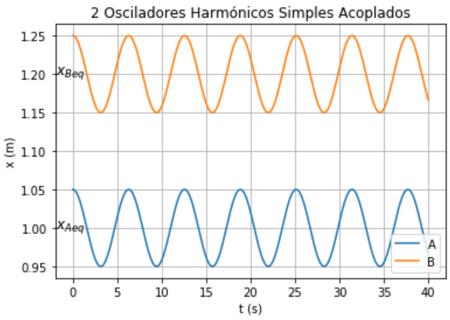
4. $A_1 = 0, A_2 = \frac{1}{2}$ e $\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$ ou $A_1 = 0, A_2 = -\frac{1}{2}$ e $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$, (ϕ_1 qualquar).

6. $\omega = \frac{n\pi v}{L} = 2\pi f \quad \Rightarrow f = \frac{nv}{2L}$. $f_1 = 200$ Hz, $f_2 = 400$ Hz, $f_3 = 600$ Hz.

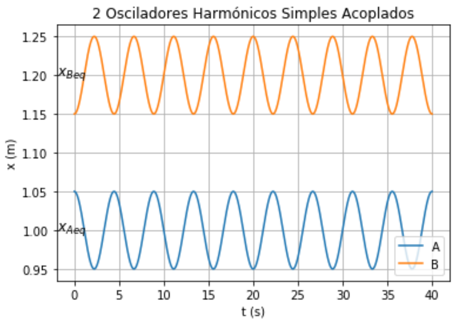
Soluções Problemas Numéricos

7. a) Usando o método de Euler-Cromer

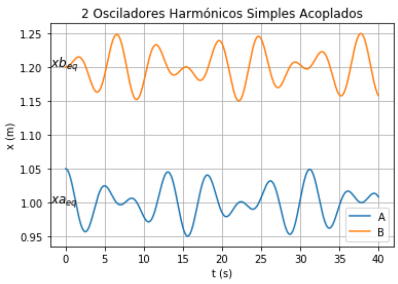
i)



ii)



iii)



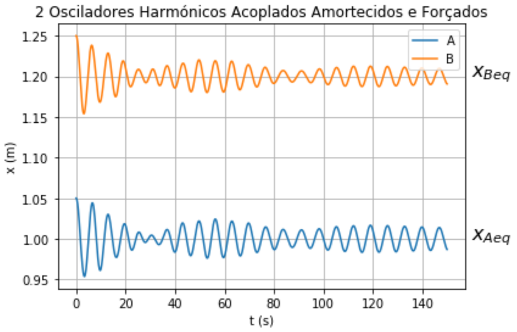
b) i) Movimento harmónico simples, ou seja movimento periódico sinusoidal, com os dois corpos sintonizados.

ii) Movimento periódico sinusoidal com os dois corpos sempre com velocidades opostas.

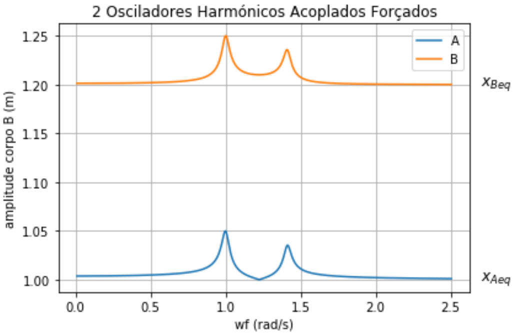
iii) Movimento irregular, com maior amplitude alternando entre os dois corpos. Com mais tempo pode ser possível observar movimento periódico.

c) i) T= 6.283 s ω = 1.00 rad/s; ii) T= 4.442 s ω = 1.414 rad/s. Sim, em ambos os casos correspondem aos períodos e frequências dos modos normais.

8. a)



b)

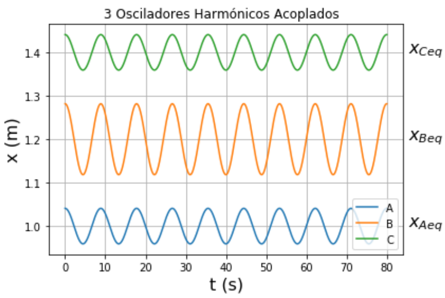


O sistema exhibe ressonância nos dois corpos na frequência dos modos normais

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k\prime}{m}} = 1.414$ rad/s.

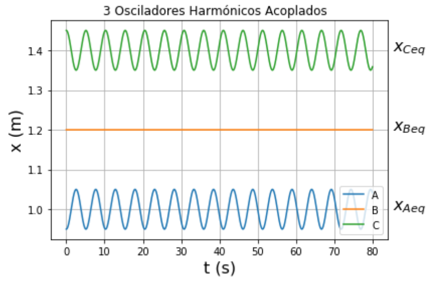
9. a) 0.707 rad/s; 1.225 rad/s; 1.414 rad/s.

b) Modo com frequência 0.707 rad/s



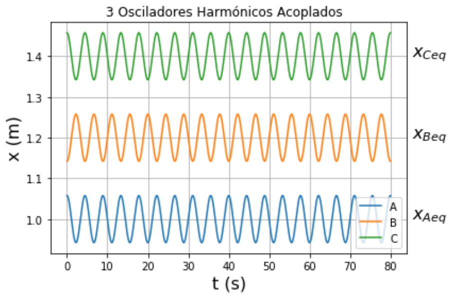
As três massas oscilam sempre sintonizadas, mas a massa do meio oscila com amplitude 2 vezes maior do que as outras.

Modo com frequência 1.225 rad/s



A massa no meio não se move. Massas A e C têm a mesma amplitiude, com movimento em espelho (sentidos opostos).

Modo com frequência 1.414 rad/s



As três massas oscilam com a mesma amplitude. A massa no meio (B) oscila no sentido oposto às outras massas.